NAVIGAZIONE LOSSODROMICA ED ORTODROMICA

Lossodromia

La lossodromia, si ottiene utilizzando le carte maggiormente in uso nella navigazione, le carte di Mercatore (o meglio: la proiezione cilindrico centrale conforme). In pratica, sulla carta nautica, è sufficiente collegare con una retta il punto di partenza ed il punto di arrivo per conoscere direttamente il valore dell'angolo di prua vera. In questo modo l'angolo di rotta calcolato rimane costante dall'inizio alla fine del percorso, tagliando tutti i meridiani con il medesimo angolo.

Come si può intuire dalla figura la lossodromia è in realtà una curva che taglia i meridiani con angolo costante.

Attraverso le seguenti relazioni è infine possibile risolvere un qualsiasi problema di navigazione lossodromica. Come ausilio alla risoluzione è necessario disporre di una calcolatrice scientifica e della tavole nautiche (Tavola 4, latitudini crescenti).

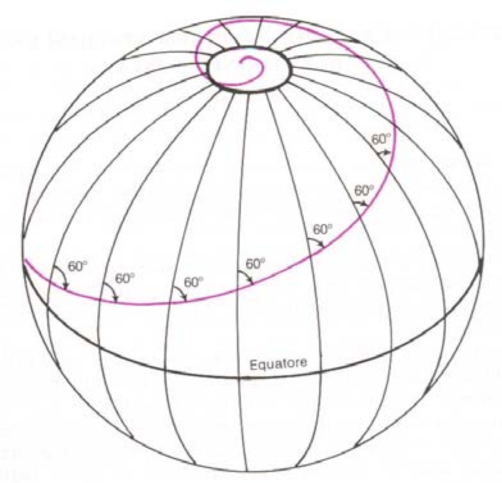

Fig. 1 Lossodromia.

$$\Delta\varphi = m \cos Rv$$

$$\mu = m \operatorname{sen} Rv$$

$$\mu = \Delta\lambda \cos\varphi$$

$$\Delta\lambda = \Delta\varphi c \operatorname{tg} Rv$$

Da ricordare, inoltre, che la rotta, quadrantale, ha due segni; il primo è sempre quello della $\Delta\varphi$, mentre il secondo è sempre quello della $\Delta\lambda$. I casi possibili sono i seguenti:

1°Pb della lossodromia: $Pp(\varphi_p;\lambda_p)$, R_v, $m \rightarrow Pa(\varphi_a;\lambda_a)$

$$\Delta\varphi = m \cos R_v \rightarrow \varphi_a = \varphi_p + \Delta\varphi;\ \Delta\varphi_c = \varphi_{ca} - \varphi_{cp}$$

$$\Delta\lambda = \Delta\varphi_c \operatorname{tg} R_v \rightarrow \lambda_a = \lambda_p + \Delta\lambda$$

Qualora risulti che $\Delta\varphi \leq 2°$, oppure m $\leq$500 miglia e $\varphi \leq 60°$, oppure se $R_v \approx 90°$, per ovvie ragioni conviene utilizzare le cosiddette relazioni approssimate:

$$\Delta\varphi = m \cos R_v \rightarrow \varphi_a = \varphi_p + \Delta\varphi;$$

$$\mu = m \operatorname{sen} R_v \rightarrow \Delta\lambda = \mu \sec\varphi_m \rightarrow \lambda_a = \lambda_p + \Delta\lambda$$

2°Pb della lossodromia: $Pp(\varphi p;\lambda p)$, $Pa(\varphi a;\lambda a) \rightarrow Rv$, m

$$\Delta\varphi = \varphi_a - \varphi_p \rightarrow \Delta\varphi_c = \varphi_{ca} - \varphi_{cp};\ \Delta\lambda = \lambda_a - \lambda_p$$

$$\downarrow$$

$$\operatorname{tg} R_v = \Delta\lambda/\Delta\varphi_c;\ m = \Delta\varphi \sec R_v$$

Qualora risulti che $\Delta\varphi \leq 2°$, oppure m $\leq$500 miglia e $\varphi \leq 60°$, oppure se $R_v \approx 90°$, per ovvie ragioni conviene utilizzare le cosiddette relazioni approssimate:

$$\mu = \Delta\lambda \cos\varphi \rightarrow \operatorname{tg} R_v = \mu/\Delta\varphi$$

$$m = \Delta\varphi \sec R_v \text{ (se } R_v < 87°)$$

$$m = \mu \operatorname{cosec} R_v \text{ (se } R_v > 87°)$$

Può essere infine di un certo interesse essere in grado di determinare il punto di incontro tra due lossodromie (φ, λ). E' necessario conoscere le coordinate di due punti appartenenti alle due lossodromie, siano $A(\varphi_1, \lambda_1)$ e $B(\varphi_2, \lambda_2)$, nonché le rispettive rotte R_1 ed R_2.

Si ha che risulta:

$$\varphi_c = [(\lambda_2 - \lambda_1)' + \varphi c_1 \operatorname{tg} R_1 - \varphi c_2 \operatorname{tg} R_2]/(\operatorname{tg} R_1 - \operatorname{tg} R_2) \rightarrow \varphi$$

$$\lambda = \lambda_1 + (\varphi c - \varphi_{c1}) \operatorname{tg} R_1$$

Dove φ_c rappresenta la latitudine crescente del punto di incontro.

Cenni di trigonometria sferica

Per poter risolvere i problemi relativi alla navigazione ortodromica è necessario avere una conoscenza di base dei principali teoremi di trigonometria sferica, in particolare:

Teorema del coseno (formule di Eulero).
Teorema del seno.
Teorema delle cotangenti.
Stella di Nepero per triangoli sferici rettangoli e rettilateri.

Vale la pena osservare che questi stessi teoremi tornano utili nell'affrontare i triangoli di posizione in astronomia nautica.

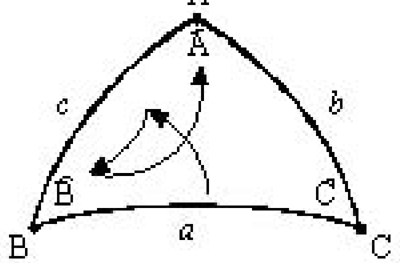

Fig. 2 Triangolo sferico e regola mnemonica relativa al Teorema delle Cotangenti.

NAVIGAZIONE LOSSODROMICA ED ORTODROMICA

Teorema del coseno: il coseno di un lato è uguale al prodotto dei coseni degli altri due lati più il prodotto dei seni moltiplicati per il coseno dell'angolo opposto.

$$\cos a = \cos b \cos c + \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c \cos A$$

$$\cos b = \cos a \cos c + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} c \cos B$$

$$\cos c = \cos a \cos b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \cos B$$

Teorema del seno: il rapporto fra il seno di un angolo ed il seno del lato opposto è costante.

$$\operatorname{sen} A/\operatorname{sen} a = \operatorname{sen} B/\operatorname{sen} b = \operatorname{sen} C/\operatorname{sen} c$$

Teorema delle cotangenti: sono formule che legano fra loro quattro elementi consecutivi: due lati e due angoli; complessivamente sono sei formule che si possono ricavare ricorrendo ad una regola mnemonica illustrata di seguito con un esempio (Fig. 2). Siano *a, C, b, A* i quattro elementi consecutivi da legare con la suddetta formula. Si disegna il triangolo sferico e si traccia una linea spezzata come mostrato in figura, si parte dal lato esterno *a* (lato non compreso fra i due angoli), si va all'altro lato *c*, si ritorna nell'angolo compreso *C* e si raggiunge infine l'angolo *A* opposto al lato *a* di partenza.

Si scrivono due terne di funzioni, di cui la prima è cotg, sen e cos (cotangente, seno e coseno) e la seconda è l'immagine speculare della prima; le sei funzioni trigonometriche vanno divise in tre coppie, fra la prima e la seconda si pone il segno d'uguaglianza, fra le ultime due si pone il segno più.

Gli argomenti delle sei funzioni trigonometriche sono nell'ordine quelli indicati dalla precedente spezzata, con l'avvertenza di scrivere due volte gli elementi corrispondenti alle cuspidi della spezzata: angolo *C* e lato *b* nell'esempio di figura. Nell'esempio proposto si ha in definitiva:

$$\operatorname{cotg} a \operatorname{sen} b = \cos b \cos C + \operatorname{sen} C \operatorname{cotg} A$$

Le altre relazioni sono:

$$\operatorname{cotg} a \operatorname{sen} c = \cos c \cos B + \operatorname{sen} B \operatorname{cotg} A$$

$$\operatorname{cotg} b \operatorname{sen} a = \cos a \cos C + \operatorname{sen} C \operatorname{cotg} B$$

$$\operatorname{cotg} b \operatorname{sen} c = \cos c \cos A + \operatorname{sen} A \operatorname{cotg} B$$

$$\operatorname{cotg} c \operatorname{sen} a = \cos a \cos B + \operatorname{sen} B \operatorname{cotg} C$$

$$\operatorname{cotg} c \operatorname{sen} b = \cos b \cos A + \operatorname{sen} A \operatorname{cotg} C$$

Stella di Nepero: tutte le formule precedenti si semplificano notevolmente nel caso di triangoli sferici rettangoli; considerando anche altre formule non riportate precedentemente, si ottengono dieci formule ridotte che possono essere facilmente ricordate con la regola mnemonica di Nepero.

Si disegna una stella a cinque punte ed in ogni settore si scrivono consecutivamente tutti gli elementi del triangolo saltando l'angolo retto e sostituendo i cateti con i loro complementi (90°-b e 90°-c) nel triangolo rettangolo. Nel triangolo rettilatero si procede effettuando il complemento agli angoli adiacenti (90°-A e 90°-B) al lato di lunghezza 90° ed il supplemento (180°-C) all'angolo opposto all'angolo di lunghezza pari a 90°. A questo punto si ha che risulta:

Il coseno di un elemento è uguale al prodotto delle cotangenti degli elementi adiacenti oppure è uguale al prodotto dei seni degli elementi opposti.

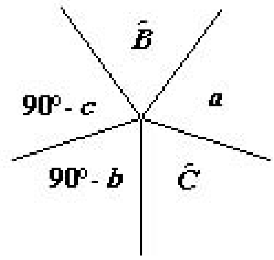

Fig. 3 Stella di Nepero.

Nel trascrivere gli elementi nei vari settori non importa da quale si parte e dal verso (orario o antiorario). In Fig. 3 è riportato il caso dell'angolo retto in A, applicando la precedente regola al lato *a* si ottengono:

$$\cos a = \operatorname{cotg} B \operatorname{cotg} C$$

$$\cos a = \operatorname{sen}(90°-b) \operatorname{sen}(90°-c) = \cos b \cos c$$

Procedendo analogamente per gli altri quattro elementi si ottengono in totale le dieci formule già menzionate.

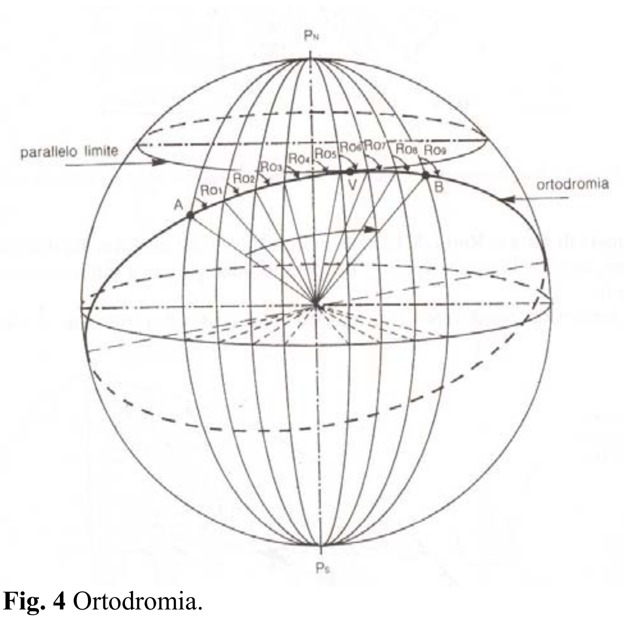

Fig. 4 Ortodromia.

Ortodromia

La particolarità dell'ortodromia nel campo della navigazione è dovuta al fatto che l'ortodromia (arco di circolo massimo) rappresenta la via più breve che congiunge due punti sulla superficie terrestre.

Chiameremo pertanto rotta ortodromica o semplicemente ortodromia quel percorso o rotta che, congiungendo due punti sulla superficie terrestre, segna l'andamento di un cerchio massimo (comunque inclinato) percorrendo la distanza più breve.

Se l'ortodromia ha il vantaggio di collegare due punti o località percorrendo la distanza più breve, ha però lo svantaggio che non taglia o incontra i meridiani con lo stesso angolo per cui il navigante, durante la traversata sarebbe costretto a cambiare continuamente la prua, cosa non agevole ed accettabile sia nella pianificazione della traversata, che nella sua realizzazione pratica.

Ovviamente tale necessità si rivela per tutte le prore, escluse quelle che collegano due punti posti all'equatore o su qualsiasi meridiano, in quanto come già detto, queste rotte seguono già il percorso ortodromico e perciò il cerchio massimo e l'angolo di rotta rimangono costanti.

Nell'ambito di una traversata ortodoromica è prioritario il calcolo della rotta iniziale (R_i) e del cammino ortodromico (d_o).

Con l'ausilio dei teoremi precedentemente introdotti si ha che:

$$\cos d_o = \cos(90°-\varphi_p) \cos(90°-\varphi_a) + \text{sen}(90°-\varphi_p)\, \text{sen}(90°-\varphi_a) \cos\Delta\lambda$$

Si può osservare, in merito al primo membro, che esso risulta positivo se la latitudine di partenza e di arrivo hanno lo stesso segno; diversamente è negativo. Il secondo membro è invece positivo se $\Delta\lambda < 90°$. Se $\Delta\lambda > 90°$ è negativo.

La determinazione della rotta iniziale si effettua a partire dal teorema delle cotangenti, ottenendo:

$$\text{cotg}R_i = \text{tg}\varphi_a\, \text{sen}\varphi_p\, \text{cosec}\Delta\lambda - \cos\varphi_p\, \text{cotg}\Delta\lambda$$

Anche in questo caso, dalla discussione sui segni si ha che il primo membro risulta positivo se la latitudine di partenza e di arrivo hanno lo stesso segno; diversamente è negativo. Il secondo membro, a causa del segno “-“ è invece positivo se $\Delta\lambda > 90°$. Se $\Delta\lambda < 90°$ è negativo. La rotta ottenuta è semicircolare e presenta due segni: il primo è sempre quello della φ_p mentre il secondo è sempre quello della $\Delta\lambda$.

Osservazioni finali

La differenza tra il percorso lossodromico e quello ortodromico su una traversata per esempio tra Roma e New York è di circa 180 miglia nautiche (~333km).

Nei casi pratici è uso comune seguire i percorsi lossodromici, nel caso di brevi traversate. Nel caso di traversate oceaniche o comunque lunghe, non essendo di fatto possibile seguire il percorso ortodromico, si procede per spezzate lossodromiche, stabilendo un cammino fisso per ogni spezzata (per esempio 300 miglia), oppure una $\Delta\lambda$ fissa (di solito ogni 10°).

Inoltre l’ortodromia ha il difetto di salire parecchio in latitudine. Può pertanto essere interessante calcolare le coordinate del vertice e, successivamente imporre una latitudine limite (φ_L) da non superare nel corso della traversata. I problemi si risolvono a partire dalla Stella di Nepero applicata ai triangoli rettangoli.

Coordinate del Vertice V(φ_V, λ_V):

$$\cos\varphi_V = \cos\varphi_p\, \text{sen}R_i$$

$$\text{cotg}\Delta\lambda_V = \text{sen}\varphi_p\, \text{tg}R_i$$

$$\text{tg}d_V = \text{cotg}\varphi_p \cos R_i$$

Latitudine Limite (φ_L):

V1 $\cos\Delta\lambda_1 = \text{tg}\varphi_p\, \text{cotg}\varphi_L$

$\text{sen}R_i = \cos\varphi_L \sec\varphi_p$

$\cos d_1 = \text{sen}\varphi_p\, \text{cosec}\varphi_L$

V2 $\cos\Delta\lambda_2 = \text{tg}\varphi_a\, \text{cotg}\varphi_L$

$d_{//} = d\lambda_3 \cos\varphi_L$

$d\lambda_3 = \Delta\lambda_{tot} - (\Delta\lambda_1 + \Delta\lambda_2)$

$\cos d_2 = \text{sen}\varphi_a\, \text{cosec}\varphi_L$

$d_{//}$ $d_{//} = \mu = \Delta\lambda_3 \cos\varphi_L$

Si osservi che $\Delta\lambda_1$ esprime la differenza di longitudine tra il Pp ed il primo vertice (V_1); $\Delta\lambda_2$, similmente, esprime la differenza di longitudine tra il secondo vertice (V_2) ed il Pa. $\Delta\lambda_3$ esprime la differenza di longitudine tra i due vertici (V_1 e V_2). $d_{//}$ esprime infine il cammino per parallelo.

Può essere di un certo interesse calcolare le coordinate di un punto sull’ortodromia, data la latitudine:

$$\cos\Delta\lambda_x = \text{cotg}\varphi_v\, \text{tg}\varphi_x$$

$$\cos d_x = \text{cosec}\varphi_v\, \text{sen}\varphi_x$$

Le conoscenze in campo climatoligico consentono poi, attraverso la consultazione delle "Pilot Charts" o delle "Routeing Charts" di tracciare delle rotte climatologiche, che tengono conto dei dati climatoligici medi relativi all'area da attraversare, consentendo di ottimizzare la pianificazione della traversata.

L'avvento dell'informatica ha infine reso la possibilità lo sfruttamento dei dati relativi agli elementi meteo marini consentendo l'elaborazione della cosiddette rotte brachistocroniche attraverso le quali è possibile minimizzare il tempo della traversata (rotte di minimo tempo).

Due parole sui vertici dell'ortodromia

Sulle carte di Mercatore gli archi di ortodromia sono rappresentati da curve che hanno la concavità rivolta verso l'equatore. Se il punto di partenza e quello di arrivo si trovano in emisferi diversi, l'arco di ortodromia che li unisce, ha, rispetto alla lossodromia 2 rami ed 1 nodo, che si trova nei pressi dell'equatore e che rappresenta il punto di intersezione tra ortodromia e lossodromia. Il nodo si trova sull'equatore solo se i due punti estremi si trovano alla medesima latitudine, ma con segno opposto.

Ogni ortodromia ha inoltre due vertici V e V' che rappresentano i punti che hanno latitudine più elevata. Quando si considera un arco di ortodromia, che unisce due punti, è possibile che questo arco comprenda uno dei vertici oppure nessuno dei vertici, può cioè accadere che entrambi i vertici cadano al di fuori dell'arco considerato.

Allorché gli angoli di R_i e R_f sono entrambi < 90° il vertice cade tra Pp e Pa. Se invece uno di questi angoli è > 90° allora il vertice cade fuori.

Vale infine la pena ricordare che i meridiani passanti per il vertice tagliano l'ortodromia con angolo retto, individuando un triangolo rettangolo e consentendo l'applicazione del metodo di Nepero per la risoluzione del triangolo sferico.

Riferimenti Bibliografici

- Istituto Idrografico della Marina "Manuale dell'Ufficiale di Rotta"
- Nicoli “Navigazione tradizionale” Ed. Quaderni marinari
- Rizzo "Navigazione di Base" Ed. Ferrari
- www.iaso.net
- www.nauticoartiglio.lu.it